数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 109-122

頂点作用素代数の Griess 代数に対する Norton の跡公式

東京大学大学院数理科学研究科

松尾 厚

本稿では, 頂点作用素代数 (VOA) V の Griess 代数 B の自分自身への随伴作用について考察する。

いうまでもなく VOA の最も重要な例は, 有名なムーンシャイン加群 $V^\natural$ である。その Griess 代数 $B^\natural$ は Griess-Conway 代数と呼ばれ, 頂点作用素代数とは独立に有限群論において研究されて来たものである。特に Norton は [No] において $B^\natural$ の元の随伴作用

$$R_a : B^\natural \to B^\natural,\ x \mapsto ax\ (= xa)$$

の合成 $R_{a_1} \cdots R_{a_m}$ $(m \leq 5)$ の跡を Griess 代数の演算と内積および $m = 5$ の場合には完全反対称な 5 重線型形式を用いて計算する公式を与えた。彼は $B^\natural$ の自己同型群がモンスター単純群になっていることに基づく群論的考察と $B^\natural$ の組合せ的な構成を巧みに用いて跡公式を導いたのであった。

本稿ではこの公式を VOA の立場から導出する。といっても, 何の条件もなしに跡公式が成立するわけではない。本稿では二つの異なる条件から跡公式を導く。

その一つは V の対称性の大きさである。正確に言うと, 5 以下の自然数 m に対して, V の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, V$ に関する固定部分空間 $V^{\mathrm{Aut}\, V}$ の次数 $2m$ 以下の部分空間が考え得る最小の部分空間になっているという条件から, $\mathrm{Tr}\, R_{a_1} \cdots R_{a_m}$ を記述する公式を導くのである。

もう一つの条件は V のモジュラー不変性である。有理的かつ自己双対的な VOA が C_2-有限性と呼ばれる条件を満たせば, その VOA の元に対するトーラス上の 1 点函数はモジュラー形式になることが知られている。階数 (中心電荷) が 24 の場合には, V の Virasoro 加群としての次数 n の最高ウェイトベクトルに対する 1 点函数がレベル 1 ウェイト n のモジュラー形式となる。このことを用いると, ウェイト 12 未満の尖点形式が存在しないことから跡公式が導出できるのである。

特にムーンシャイン加群 $V^\natural$ は上のいずれの条件も満たしており, $m \leq 5$ に対して次の公式が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, R_{a_1} &= 32814(a_1|\omega), \\
\mathrm{Tr}\, R_{a_1} R_{a_2} &= 4620(a_1|a_2) + 5084(a_1|\omega)(a_2|\omega),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3} &= 900(a_1|a_2|a_3) + 620\,\mathrm{Cyc}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega) \\
&\quad +744(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega), \\
\mathrm{Tr}\, R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3}R_{a_4} &= 166(a_1a_2|a_3a_4) - 116(a_1a_3|a_2a_4) + 166(a_1a_4|a_2a_3) \\
&\quad +114\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|\omega) + 52\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|a_4) \\
&\quad +80\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega)(a_4|\omega) + 104(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega)(a_4|\omega), \\
\mathrm{Tr}\, R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3}R_{a_4}R_{a_5} &= 30\mathrm{Cyc}\,(a_1a_2|a_3|a_4a_5) + 4\mathrm{Cyc}\,(a_1a_4|a_3|a_2a_5) \\
&\quad -22\mathrm{Cyc}\,(a_1a_5|a_3|a_2a_4) + 20\mathrm{Cyc}\,(a_1a_2|a_3a_4)(a_5|\omega) \\
&\quad -14\mathrm{Cyc}\,(a_1a_3|a_2a_4)(a_5|\omega) + 20\mathrm{Cyc}\,(a_1a_4|a_2a_3)(a_5|\omega) \\
&\quad +8\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|a_5) + 14\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|\omega)(a_5|\omega) \\
&\quad +6\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|a_4)(a_5|\omega) + 10\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega)(a_4|\omega)(a_5|\omega) \\
&\quad +14(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega)(a_4|\omega)(a_5|\omega) + 52(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)
\end{aligned}
$$

ここで $(a_i|a_j|a_k)$ は $(a_ia_j|a_k) = (a_i|a_ja_k)$ を表し, Sym は添字の置換に関する和を, Cyc は添字の巡回置換に関する和を表す。また $m = 5$ の最後の項は完全反対称なある 5 重線型形式であり, VOA の演算を用いれば,

$$
(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\mathbf{1} = \frac{1}{5!}\sum_{\sigma\in S_5}(-1)^{\ell(\sigma)}\sigma(a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)}a_{4(0)}a_5)
$$

と書かれるものである。ただし σ は添字 $\{1,\ldots,5\}$ の置換を表す。

すでに触れたように, この公式は Norton によってすでに得られていたものであるが,[注1] 筆者の方法は Griess 代数の具体的な構造には依存せず, 特にモジュラー不変性から導く方法では全く群論を用いない証明となっている。一方, 対称性の大きさから導く方法には, $V^\natural$ 以外でも同様の性質を満たす VOA の Griess 代数に一般化できるという利点がある。

ところでムーンシャイン加群の階数は $c = 24$ であった。この 24 という自然数は数学のさまざまな側面に現れ神秘的な様相を示していることは良く知られているとおりである。VOA の立場では例えばモジュラー不変性と関連して 24 という数が出てくる。それでは対称性の大きさという観点から 24 という数はどのようにとらえられるのだろうか?我々は c に特段の制限はつけずに考察し, VOA V の自己同型群が上記の条件を次数 8 まで満たす場合, 自動的に $c = 24$ でなければならないことを見る。すなわち非常に大きな対称性を持つ良い VOA の階数は $c = 24$ でなければならないということがいえるのである。そのような VOA はムーンシャイン加群と同型になってしまうのではないかと期待されるが現在のところわかっていない。

本稿は論文 [Ma2] の一部とその背景の解説である。研究集会「符号, 格子, 頂点作用素代数」講究録に載せる予定の「W 代数とモンスター」もあわせて御覧頂きたい。

短期共同研究での講演を薦めてくださった永友清和氏に感謝する。

1. ただし, 彼は $m = 5$ のときについては $a_1, \ldots, a_5$ が単位元と直交する場合, すなわち $(a_1|\omega) = \cdots = (a_5|\omega) = 0$ の場合しか記していない。また完全反対称な 5 重線型形式については, 跡公式自体をその定義と見なせるとしか書いていない。

1 頂点作用素代数の Griess 代数

複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された頂点作用素代数 (VOA) V を考える。本稿ではその演算および次数付けをそれぞれ

$$Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}z^{-n-1},\quad V=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^n \tag{1.1}$$

と表す。以下では V^0 が真空ベクトル $\mathbf{1}$ で張られ V^1 が消えている場合のみを考える。ムーンシャイン加群はこの条件を満足している。

VOA の一般論については [FLM],[MaN] などをご覧いただきたいが, 後に用いるのでいわゆる Borcherds 恒等式 (Cauchy-Jacobi 恒等式) を書いておく:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a_{(r+i)}b)_{(p+q-i)}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^r\binom{r}{i}\left(a_{(p+r-i)}b_{(q+i)}-(-1)^r b_{(q+r-i)}a_{(p+i)}\right) \tag{1.2}$$

ただし $a,b,c\in V$ であり p,q,r は任意の整数である。またVOAには共形ベクトルと呼ばれる次数 2 の元 $\omega\in V^2$ が与えられており, 附随する作用素 $L_n=\omega_{(n+1)}$ が Virasoro 代数の表現をなしている:

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\,c \tag{1.3}$$

その中心電荷 c をVOAの用語に従って V の階数という。また L_0 の固有値は共形ウェイトと呼ばれ, 冒頭で述べた V の次数付けは L_0 に関する固有空間分解に他ならない。

さて, 次数 2 の部分空間 $B=V^2$ を考えると, これには

$$ab=a_{(1)}b,\quad (a|b)\mathbf{1}=a_{(3)}b \tag{1.4}$$

によって可換非結合的代数の構造および不変な内積 (対称双線型形式) が入る。これを一般に VOA V の Griess 代数と呼ぶ。すでに述べたように, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の Griess 代数 $B^\natural$ は有限群論における Griess-Conway 代数と同型であって, その自己同型群はモンスター単純群である。

以下では B の元 a による随伴作用を

$$R_a:B\to B,\ x\mapsto xa\ (=ax) \tag{1.5}$$

と表す。

我々の考える VOA V は定数倍を除き一意的な不変双線型形式 $(\,|\,)$ を持つ[注2] この形式を $(\mathbf{1}|\mathbf{1})=1$ と正規化しておく。これは B 上の内積 $(\,|\,)$ の V 全体への拡張になっており, $i\neq j$ ならば $(V^i|V^j)=0$ であり, $L_1a=0$ なるベクトル $a\in V^m$ に対しては

$$(a_{(n)}u|v)=(-1)^m(u|a_{(2m-2-n)}v),\quad (u,v\in V) \tag{1.6}$$

が成立する。特に, 任意の $a\in B$ に対して $(a_{(n)}u|v)=(u|a_{(2-n)}v)$ が成立する。

2. 文献 [Li] を参照。条件 $\dim V^0=1,\dim V^1=0$ を仮定していることに注意して頂きたい。

2 $\mathcal{S}^n$ 級の頂点作用素代数

VOA V の共形ベクトル ω に附随する Virasoro 代数の作用 $L_n = \omega_{(n+1)}$ によって V を Virasoro 加群と考える。真空ベクトル $\mathbf{1}$ で生成された Virasoro 部分加群を V_ω とする。VOA の公理から $n \geq -1$ のとき $L_n\mathbf{1} = 0$ が成立するので

$$M(c,0)/M(c,1) \to V_\omega \to L(c,0) \tag{2.1}$$

なる全射の列がある。ここで $M(c,h)$ は中心電荷 c, 最高ウェイト h の Verma 加群であり, $L(c,h)$ はその既約な商である。ここで加群 $M(c,0)/M(c,1)$ が共形ウェイト n の特異ベクトルを含むのは, 中心電荷 c がある多項式 $D_n(c)$ の零点になっているときである。多項式 $D_n(c)$ は以下のようなものである。

$$\begin{aligned}
&D_2(c) = c,\\
&D_4(c) = c(5c+22),\\
&D_6(c) = c(2c-1)(5c+22)(7c+68),\\
&D_8(c) = c(2c-1)(3c+46)(5c+3)(5c+22)(7c+68),\\
&D_{10}(c) = 10c(2c-1)(3c+46)(5c+3)(5c+22)(7c+68)(11c+232)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

もし $D_n(c) \neq 0$ ならば写像 (2.1) が次数 n まで同型となり, 部分空間 $V_\omega^{\leq n}$ は $(M(c,0)/M(c,1))^{\leq n}$ と同一視される。以下では簡単のため $D_n(c) \neq 0$ と仮定する。実際に考察するのは $n \leq 11$ の場合なので, 除外されるケースは高々 $c = 0$, $1/2$, $-46/3$, $-3/5$, $-22/5$, $-68/7$, $-232/11$ である。これらはいずれも我々の観点からはつまらない場合である。

さて, VOA V の自己同型全体のなす群を $\mathrm{Aut}\,V$ と表す。任意の自己同型は定義によって Virasoro 部分加群 V_ω に属する元を固定する。従って自己同型群による固定部分空間 $V^{\mathrm{Aut}\,V}$ を考えると

$$V_\omega \subseteq V^{\mathrm{Aut}\,V} \tag{2.3}$$

なる包含関係がある。ここで V の対称性が大きいとは $V^{\mathrm{Aut}\,V}$ が小さいことであると考えよう。すると V の対称性が特に大きい場合とは, 上の包含関係で等号が成立する場合であると考えられよう。そこで次のように定義する。

定義 2.1 VOA V が $\mathcal{S}^n$ 級であるとは[注3] $\mathrm{Aut}\,V$ の $V^{\leq n}/V_\omega^{\leq n}$ への作用が自由であることと定める。

すなわち V が $\mathcal{S}^n$ 級であるとは包含関係 (2.3) において次数 n まで等号が成立することである。言い換えれば $\mathrm{Aut}\,V$ が $V_\omega^{\leq n}$ に属するもの以外の $V^{\leq n}$ の元を固定しないことである。

Virasoro 代数の最高ウェイト既約表現 $L(c,0)$ に附随した VOA は $L(c,0)_\omega = L(c,0)$ なので自明に $\mathcal{S}^\infty$ 級である。しかしこの VOA は Griess 代数が 1 次元なので我々の観点からはつまらない。従って以下では $d = \dim B \geq 2$ の場合を考察する。

3. 微分積分学の用語「C^n 級函数」に触発されて筆者が導入した造語である。$\mathcal{S}$ は Symmetry の頭文字のつもりである。

一方, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は $\mathcal{S}^{11}$ 級であることが知られている。[4] その場合の階数 $c = 24$ と Griess 代数の次元 $d = 196884$ のペアがきわめて例外的なものであることを第4節で見る。

3 Griess 代数に対する跡公式

階数 c の VOA V の Griess 代数 B を考え, $d = \dim B$ とする。不変内積 $(\,|\,)$ は非退化であると仮定する。

ベクトル空間 B の基底 $\{x_1, \ldots, x_d\}$ を選び, 内積 $(\,|\,)$ に関する双対基底を $\{x^1, \ldots, x^d\}$ とする。いわゆる Einstein の規約により, 上下に同じ添字 i があれば $i = 1, \ldots, d$ に関する和をとると約束する。例えば $(x^i_{(3)}a)_{(-1)}x_i = (x^i|a)x_i = a$ である。

さて, 計算したい跡は

$$\mathrm{Tr}\, R_{a_1} \cdots R_{a_m} = (a_{1(1)} \cdots a_{m(1)} x_i | x^i) = (x^i_{(1)} a_{m-1(1)} \cdots a_{1(1)} x_i | a_m) \tag{3.1}$$

と表される。恒等式 (1.2) および V 上に拡張された形式 $(\,|\,)$ の不変性を用いてこの式を $(x^i_{(k)} x_i | (a_1, a_2, \ldots, a_m$ の式$))$ の形の項の和に書けるまで変形することにより跡を計算したい。

そこで一種の Casimir 元

$$\kappa_n = x^i_{(3-n)} x_i = \sum_{i=1}^{d} x^i_{(3-n)} x_i \tag{3.2}$$

を考える。容易にわかるように, これは基底の取り方に依存せずに定まる。恒等式 (1.2) を用いると, これらの元は

$$L_m \kappa_k = (m + k - 2)\kappa_{k-m} + \delta_{m,2} L_{-k+2}\mathbf{1} + \delta_{m,k-2} \frac{m^3 - m}{6} L_{-2}\mathbf{1} \tag{3.3}$$

なる関係式で結ばれていることがわかる。

容易にわかるように Casimir 元 κ_n は V の任意の自己同型によって固定されている。従って V が $\mathcal{S}^n$ 級ならば Casimir 元 κ_n は真空ベクトルで生成された Virasoro 部分加群 V_ω^n に属さなければならないことになる。ここで V_ω は次数 n 以下の特異ベクトルを含まないとしていたので, ベクトル κ_n は関係式 (3.3) から一意的に決定される。具体的に計算すると

$$\kappa_2 = \frac{4d}{c}\omega, \quad \kappa_4 = \frac{6(d-1)}{5c+22}\omega_{(-3)}\mathbf{1} + \frac{2(5c+22d)}{c(5c+22)}\omega_{(-1)}\omega, \tag{3.4}$$

などととなる。高次の n に対する具体型は複雑なので省略するが, $c = 24$ かつ

4. 文献 [HL] を参照。

$d = 196884$ の場合は

$$
\begin{aligned}
\kappa_2 &= 32814[2], \quad \kappa_4 = 8319[4] + 2542[2,2], \\
\kappa_6 &= 3492[6] + 1302[4,2] + \frac{1271}{2}[3,3] + 124[2,2,2], \\
\kappa_8 &= \frac{3863}{2}[8] + 552[6,2] + 434[5,3] + \frac{333}{2}[4,4] \\
&\qquad\qquad +96[4,2,2] + 93[3,3,2] + \frac{13}{3}[2,2,2,2], \\
\kappa_{10} &= 1182[10] + \frac{613}{2}[8,2] + 207[7,3] + 141[6,4] + 41[6,2,2] \\
&\qquad +74[5,5] + 64[5,3,2] + \frac{99}{4}[4,4,2] + 24[4,3,3] \\
&\qquad\qquad +\frac{9}{2}[4,2,2,2] + \frac{13}{2}[3,3,2,2] + \frac{7}{60}[2,2,2,2,2]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

となる。ただし $[n_1, n_2, \ldots, n_k] = L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_k} \mathbf{1}$ である。

さて, 跡の計算に戻ろう。まず V が $\mathcal{S}^2$ 級の場合を考え, a を Griess 代数 B の任意の元とする。すると (3.1),(3.2), (3.4) により

$$
\operatorname{Tr} R_a = (a_{(1)} x^i | x_i) = (x^i_{(1)} x_i | a) = \frac{4d}{c}(a|\omega) \tag{3.6}
$$

となり, 跡が計算できた。次に二つの元 $a_1, a_2 \in B$ をとる。すると

$$
\operatorname{Tr} R_{a_1} R_{a_2} = (a_{1(1)} a_{2(1)} x^i | x_i) = (x^i_{(1)} a_{1(1)} x_i | a_2) \tag{3.7}
$$

であるが, 恒等式 (1.2) の $p = -1, q = 1, r = 2$ の場合により

$$
-(x^i_{(3)} a_1)_{(-1)} x_i = x^i_{(1)} a_{1(1)} x_i + x^i_{(-1)} a_{1(3)} x_i - a_{1(3)} x^i_{(-1)} x_i + 2a_{1(2)} x^i_{(0)} x_i - a_{1(1)} x^i_{(1)} x_i
$$

が成立する。これを用いると, 計算したい跡は

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr} R_{a_1} R_{a_2} &= -2(a_1|a_2) + (a_{1(3)} x^i_{(-1)} x_i | a_2) - (a_{1(1)} x^i_{(1)} x_i | a_2) \\
&= -2(a_1|a_2) + (x^i_{(-1)} x_i | a_{1(-1)} a_2) - (x^i_{(1)} x_i | a_{1(1)} a_2) \\
&= -2(a_1|a_2) + (\kappa_4 | a_{1(-1)} a_2) - (\kappa_2 | a_{1(1)} a_2)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

と変形される。従って V が $\mathcal{S}^4$ 級の場合, すでに決定した κ_2 および κ_4 の具体形 (3.4) を代入し, Virasoro 代数の交換関係から得られる式

$$
\begin{aligned}
&(\omega_{(-3)} \mathbf{1} | a_{1(-1)} a_2) = (\mathbf{1} | L_4 a_{1(-1)} a_2) = 6(a_1|a_2), \\
&(\omega_{(-1)} \omega | a_{2(-1)} a_1) = (\mathbf{1} | L_2 L_2 (a_{2(-1)} a_1)) = 2(a_1|\omega)(a_2|\omega) + 8(a_1|a_2)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

を用いると

$$
\operatorname{Tr} R_{a_1} R_{a_2} = \frac{-2(5c^2 - 88d + 2cd)}{c(5c+22)}(a_1|a_2) + \frac{4(5c+22d)}{c(5c+22)}(a_1|\omega)(a_2|\omega) \tag{3.10}
$$

となり, 跡が計算できた。

同様の方法により, $m=3,4$ の場合にも $\mathcal{S}^{2m}$ 級の VOA の Griess 代数の m 個の元の随伴作用の合成の跡が計算できるが, $m=5$ となると多少様子が変わる。すなわち, 計算の途中で $a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)}a_{4(0)}a_5$ なるタイプの元が現れ, これは恒等式 (1.2) をいくら用いても Griess 代数の積と不変内積に帰着されない。しかし, それらに加え, はじめに述べた完全反対称な 5 重線型形式

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mathbf{1}=\frac{1}{5!}\sum_{\sigma\in S_5}(-1)^{\ell(\sigma)}\sigma(a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)}a_{4(0)}a_5) \tag{3.11}$$

を用いれば跡を記述することができる。ここで σ は添字 $\{1,\ldots,5\}$ の置換を表す。

以上をまとめると

定理 1 VOA V の Griess 代数 B 上の不変内積が非退化であるとする。各 $m=1,2,3,4$ に対して, V が $\mathcal{S}^{2m}$ 級ならば, 跡 $\mathrm{Tr}\,R_{a_1}\cdots R_{a_m}$ は, Griess 代数の演算および不変内積を用いて表される。さらに V が $\mathcal{S}^{10}$ 級ならば, 跡 $\mathrm{Tr}\,R_{a_1}\cdots R_{a_5}$ は Griess 代数の演算, 不変内積および 5 重線型形式を用いて表される。[註5]

この定理の計算アルゴリズムは簡単なものだが, $m=4,5$ の場合手計算による実行は絶望的である。筆者は Mathematica のプログラムを書いて結果を得た。ムーンシャイン加群の場合, すなわち $c=24$ かつ $d=196884$ の場合の結果は本稿のはじめに記した通りである。一般の場合の具体形はきわめて複雑なので本稿では省略するが, 興味のある方は論文 [Ma1] をご覧いただきたい。

4 階数 c と次元 d の関係および $c=24$ の特殊性

階数 c の VOA V の Griess 代数 B を考え, $d=\dim B\geq 2$ かつ B の内積 $(\,|\,)$ は非退化であると仮定する。本節では, B の冪等元の性質を利用して, 対称性の大きい VOA について中心電荷 c と Griess 代数の次元 d の間に成立する関係を導く。

本稿では便宜的に, $e_{(1)}e=2e$ を満たす元 e を B の冪等元 (idempotent) と呼ぶことにする。Griess 代数 B の真冪等元とは, 冪等元 e であって, その中心電荷 b が 0 とも階数 $c=2(\omega|\omega)$ とも異なるもののことであるとする。もし, 不変内積 $(\,|\,)$ が正定値であるような実形を B が持てば, 共形ベクトル ω は二つの真冪等元の和に分解することが知られている。[註6]

さて, 冪等元については, 次の性質がある。

補題 4.1 冪等元 $e\in B$ で生成されたベクトル $\varphi(e)\in V$ および任意のベクトル $a_1,a_2\in B$, $m\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$(e_{(2)}(a_{1(m-1)}a_2)|\varphi(e))=(3-m)(a_{1(m)}a_2|\varphi(e)) \tag{4.1}$$

が成立する。

5. なお, m の場合の跡公式で $a_m=\omega$ とすれば, $m-1$ の場合の跡公式が得られる。
6. 文献 [MeN], [Mi] を参照。

補題より, 特に

$$(x^i_{(-1)}e_{(1)}x_i|e_{(0)}e_{(0)}e) = 3(x^i_{(0)}e_{(1)}x_i|e_{(0)}e) \tag{4.2}$$

が成立することがわかる。VOA V が $\mathcal{S}^6$ 級であるとして, この両辺を前節の計算方法で計算してみると, あろうことか答が一致しない。しかし, その二つの答が一致すべしという条件を書いてみると

$$b(b-c)\Big((70c^2+955c+2388)c-2(c^2-55c+748)d\Big)=0, \tag{4.3}$$

となる。ここに $b=2(e|e)$ は e の中心電荷である。従って, e が真冪等元ならば,

$$d=\frac{(70c^2+955c+2388)c}{2(c^2-55c+748)} \tag{4.4}$$

が成立する。この関係式から, 特に c が正の半整数であるとすると, 次元 d が 2 以上の整数であるべきことから, そのようなペア (c,d) は以下のものに限られることがわかる。[注7]

c	d	c	d	c	d	c	d
8	156	$23\frac{1}{2}$	96256	32	139504	$54\frac{1}{2}$	9919
16	2296	24	196884	34	57889	68	8146
20	10310	$24\frac{1}{2}$	1107449	36	35856	$93\frac{1}{2}$	7566
$21\frac{1}{2}$	21414	$30\frac{1}{2}$	1964871	40	20620	132	8154
22	28639	$31\frac{1}{2}$	207144	44	14994	1496	54836

ここで $(24,196884)$ はいうまでもなくムーンシャイン加群の場合だが, $(23\frac{1}{2},96256)$ というのは, ベビーモンスターと関係する頂点作用素超代数[注8] $VB^\natural$ の (c,d) と一致する。また $(8,156)$ というのは $\sqrt{2}E_8$ 型格子に附随した VOA の対合による固定部分空間 $V^+_{\sqrt{2}E_8}$ の (c,d) と一致し, さらに $(16,2296)$ というのは Barnes-Wall 格子 Λ_{16} に附随した VOA の対合による固定部分空間 $V^+_{\Lambda_{16}}$ の (c,d) と一致している。

同様の方法で, もし V が $\mathcal{S}^8$ だったら,

$$(x^i_{(-3)}e_{(1)}x_i|e_{(0)}e_{(0)}e_{(0)}e_{(0)}e) = 5(x^i_{(-2)}e_{(1)}x_i|e_{(0)}e_{(0)}e_{(0)}e), \tag{4.5}$$

の両辺を計算することによって,

$$d=\frac{5250c^5+155250c^4+1369715c^3+3507098c^2+1497768c}{125c^4-4770c^3-23382c^2+1561868c+1032240} \tag{4.6}$$

を得る。関係式 (4.4) と連立することによって, 次の定理を得る。

定理 2 $\mathcal{S}^8$ 級の VOA の Griess 代数 B が正定値の実形を持つならば, $c=24$ かつ $d=196884$ でなければならない。

7. 実は, 跡を二通りに計算した結果が一致しなかったのは, 自分が書いた Mathematica のプログラムにバグがあるせいだと思って, 目を皿のようにしてプログラムをチェックしたが, バグは発見できなかった。その後, 結果の不一致から上の表が得られることがわかり, このような精妙な数値がプログラムのバグからでてきたとはちょっと考えられないので, 結局バグはなかったのだと思う。
8. 文献 [Hö] を参照。

かくして, (24, 196884) という数値が非常に特別なものであることが我々の立場からもわかるのである。

さて, 次に Griess 代数 B が中心電荷 1/2 の冪等元 e を含む場合を考えよう。より正確には, e が生成する部分 VOA が $c = 1/2$ の最高ウェイト既約 Virasoro 加群に附随する VOA と同型である場合を考える。このとき, e の随伴作用の固有値は $0, 1/2, 1/16$ および 2 に限り, 固有値 2 の固有空間は e で張られた 1 次元空間である。そこで固有値 λ の固有空間の次元を $d(\lambda)$ と表すことにしよう。

まず, $d(\frac{1}{16}) = 0$ の場合を考察する。VOA V は $\mathcal{S}^4$ 級であるとしよう。この場合, $d = d(0) + d(\frac{1}{2}) + d(2)$ と分解しているので, 随伴作用 R_e を施すことにより

$$\mathrm{Tr}\, R_e = \frac{d(\frac{1}{2})}{2} + 2, \quad \mathrm{Tr}\, R_e^2 = \frac{d(\frac{1}{2})}{4} + 4 \tag{4.7}$$

がわかる。これより $d(\frac{1}{2})$ を消去すると, $2\mathrm{Tr}\, R_e^2 - \mathrm{Tr}\, R_e = 6$ を得る。前節の跡公式を代入して整理すると

$$(-22 + 2c)d = (-37 - 10c) \tag{4.8}$$

これより, 階数 c が正の半整数の場合には, $d(0)$ および $d(\frac{1}{2})$ が非負整数であるべきことから, これらの値は次の表のいずれかでなければならない。

c	$d =$	$d(0) +$	$d(\frac{1}{2}) +$	$d(2)$	c	$d =$	$d(0) +$	$d(\frac{1}{2}) +$	$d(2)$
4	22 =	14 +	7 +	1	$9\frac{1}{2}$	418 =	333 +	84 +	1
$7\frac{1}{2}$	120 =	91 +	28 +	1	10	685 =	551 +	133 +	1
8	156 =	120 +	35 +	1	$10\frac{1}{2}$	1491 =	1210 +	280 +	1

ここで $c = 8$ かつ $d = 156$ の場合は, すでに述べたように, 格子 $\sqrt{2}E_8$ に附随した VOA の対合による固定部分空間の (c, d) と一致しているのだが, さらに固有空間分解 $156 = 120 + 35 + 1$ も Griess の計算結果 [Gr2] と一致している。なお, Griess によれば, この VOA の自己同型群は $O_{10}^+(2)$ である。

さて, 次に固有値 1/16 がある場合を考える。同様にして, V が $\mathcal{S}^6$ 級であれば,

$$(2c^2 - 110c + 1496)d = (70c^2 + 955c + 2388)c \tag{4.9}$$

となる。これを用いると, c が正の半整数の場合には, (c, d) は次のいずれかでなければならないことがわかる。

c	$d =$	$d(0) +$	$d(\frac{1}{2}) +$	$d(\frac{1}{16}) +$	$d(2)$
16	2296 =	1116 +	155 +	1024 +	1
20	10310 =	4914 +	403 +	4992 +	1
$23\frac{1}{2}$	96256 =	46851 +	2300 +	47104 +	1
24	196884 =	96256 +	4371 +	96256 +	1
$24\frac{1}{2}$	1107449 =	543960 +	22816 +	540672 +	1
$30\frac{1}{2}$	1964871 =	1029630 +	13640 +	921600 +	1
$31\frac{1}{2}$	207144 =	109771 +	1116 +	96256 +	1
32	139504 =	74340 +	651 +	64512 +	1
36	35856 =	19951 +	0 +	15904 +	1

5 モジュラー不変性と跡公式

本節では, 階数が 24 の場合に, (トーラス上の) 1 点函数のモジュラー不変性というこれまでとは別の側面から跡公式を導く。その鍵となるのは, $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイト 12 未満の尖点形式が存在しないという事実である。

まず, Frenkel-Zhu に従い, V の次数 n の元 v に対して

$$o(v) = v_{(n-1)} : V \to V \tag{5.1}$$

とおく。このとき, v に対する 1 点函数は

$$Z(v,\tau) = \mathrm{Tr}\, Y(v,z) q^{L_0 - c/24} = q^{-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Tr}\,|_{V^n}\, o(v))\, q^n \tag{5.2}$$

で定義された上半平面上の函数である。ただし $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とする。

VOA V が自己双対的であるとは, 既約 V-加群が V 自身に限ることである。[9] 階数 $c = 24$ の有理的かつ自己双対的な VOA V が C_2-有限性と呼ばれる条件を満たせば, V の Virasoro 加群としての最高ウェイトベクトルで次数が n のものを u とするとき, 1 点函数 $Z(u,\tau)$ はレベル 1 ウェイト n のモジュラー形式となり,[10] さらに $n \geq 2$ ならば尖点形式となる。[11] なお, V の指標は

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim V^n)\, q^n = q(J(q) - 744) \tag{5.3}$$

となり, 自動的に $d = 196884$ でなければならないことを注意しておく。

さて, このような u から生成された Virasoro 部分加群の元に対する 1 点函数全体のなす空間は, レベル 1 の正則モジュラー形式全体のなす可換環 $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$ の中で, $Z(u,\tau)$ で生成された, 作用素

$$\partial : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+2}, \quad f(\tau) \mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{d\tau} f(\tau) + nE_2(\tau) f(\tau) \tag{5.4}$$

に関する ∂-イデアルをなしている。[12] しかるに, レベル 1 でウェイトが 12 未満の尖点形式は存在しないから, 次数 2 以上 11 以下の最高ウェイトベクトルから生成された Virasoro 部分加群の任意の元 v に対して $Z(v,\tau) = 0$ であって, 特に B 上でも $\mathrm{Tr}\,|_B\, o(v) = 0$ となる。

このような VOA V を中心電荷 24 の Virasoro 加群と見たとき, V は真空ベクトル $\mathbf{1}$ から生成された部分とそれ以外の最高ウェイトベクトルから生成された部分の直和に分解することが Virasoro 代数の表現論からわかる。そこで各 $v \in V$ に対して,

9. 正則とも呼ばれるが, ここでは Höhn [Hö] などの用語に従った。
10. 文献 [Z] を参照。なお, v が最高ウェイトベクトルでない場合, v が通常の次数付けについて斉次であっても 1 点函数は斉ウェイトとは限らない。
11. VOA の公理から $u_{(n-1)}\mathbf{1} = 0$ $(n \geq 1)$ である。本稿を通じて $\dim V^0 = 1$ かつ $V^1 = 0$ と仮定していたことに注意していただきたい。
12. 文献 [DM] を参照。

$\delta(v)$ をその V_ω への射影とする。すると, 上で述べたことにより, $\mathrm{Tr}\,|_B\, o(v-\delta(v))=0$ が成立する。すなわち

$$\mathrm{Tr}\,|_B o(v) = \mathrm{Tr}\,|_B o(\delta(v)) \tag{5.5}$$

が成立する。すると $\delta(v)\in V_\omega$ については, B 上の作用が Virasoro 代数の交換関係を利用して計算可能である。

例えば, $a\in B$ については

$$a = \frac{2(a|\omega)}{c}\omega + \pi, \tag{5.6}$$

となる。ここに π は $B=V^2$ に属する最高ウェイトベクトルである。従って $\delta(a)=2(a|\omega)\omega/c$ である。しかるに, 作用素 $o(\omega)=L_0$ は B 上で固有値 2 で作用するから

$$\mathrm{Tr}\,R_a = \frac{2(a|\omega)}{c}\mathrm{Tr}\,R_\omega = \frac{4d}{c}(a|\omega) \tag{5.7}$$

となり, 跡公式が得られた。また a_1, a_2 を B の任意の元とすると, 恒等式 (1.2) で $p=2, q=1, r=-1$ とすることによって, B 上で

$$a_{1(1)}a_{2(1)} = (a_{1(-1)}a_2)_{(3)} + 2(a_{1(0)}a_2)_{(2)} + (a_{1(1)}a_2)_{(1)} - a_{1(-1)}a_{2(3)} - a_{2(-1)}a_{1(3)}$$

従って,

$$\mathrm{Tr}\,R_{a_1}R_{a_2} = \mathrm{Tr}\,|_B(a_{1(-1)}a_2)_{(3)} + 2\mathrm{Tr}\,|_B(a_{1(0)}a_2)_{(2)} + \mathrm{Tr}\,|_B(a_{1(1)}a_2)_{(1)} - 2(a_1|a_2)$$

を得る。ここで

$$\delta(a_{1(-1)}a_2) = \frac{6c(a_1|a_2) - 12(a_1|\omega)(a_2|\omega)}{c(5c+22)}[4] + \frac{44(a_1|a_2) + 20(a_1|\omega)(a_2|\omega)}{c(5c+22)}[2,2],$$
$$\delta(a_{1(0)}a_2) = \frac{2(a_1|a_2)}{c}[3], \quad \delta(a_{1(1)}a_2) = \frac{4(a_1|a_2)}{c}[2]$$

および $\mathrm{Tr}\,|_B[4]_{(3)} = 6d$, $\mathrm{Tr}\,|_B[2,2]_{(3)} = 8d+c$, $\mathrm{Tr}\,|_B[3]_{(2)} = -4d$, $\mathrm{Tr}\,|_B[2]_{(1)} = 2d$ を代入して整理すれば,[註13] 跡公式が得られる。

このようにして, 次の定理が証明される。

定理 3 階数 24 の自己双対的な VOA V の 1 点函数がモジュラー不変性を持てば, V の Griess 代数 B についてはじめに述べた跡公式が成立する。

もちろん, このような性質を持つ VOA はムーンシャイン加群 $V^\natural$ と同型であることが期待されるが, これはいわゆる Frenkel-Lepowsky-Meurman の一意性予想 (Uniqueness Conjecture) に含まれる。[註14]

13. 記号 $[n_1,\ldots,n_k]$ は $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\mathbf{1}$ を意味する。
14. 階数 24 の VOA V が自己双対的でその指標が $q(J(q)-744)$ と一致すれば, それはムーンシャイン加群 $V^\natural$ と同型であろうという予想のこと。Leech 格子の特徴付けの類似である。

6 跡函数の計算

前節までは, Griess 代数 B の随伴作用に関する跡のみを考えてきた。しかし, B はすべての次数の空間 V^n に

$$o(a) : V^n \to V^n \tag{6.1}$$

によって作用している。これらの作用の跡をすべての n について考えるということは, $a \in B$ に対するトーラス上の 1 点函数を考えることに他ならないのであった。よって, さらに跡

$$\mathrm{Tr}\, o(a_1) \cdots o(a_m) q^{L_0} \tag{6.2}$$

を計算したいと考えることは自然であろう。

詳しい説明は省略するが, 前節までに述べたのと同様の自己同型群に関する条件あるいはモジュラー不変性から, 少なくとも $m = 1, 2$ の場合については跡を計算することができる。すなわち, V が $\mathcal{S}^2$ 級の場合には $\mathrm{Tr}\, o(a) q^{L_0}$ を指標

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim V^n) q^n \tag{6.3}$$

によって表す公式が得られる。さらに V が $\mathcal{S}^4$ 級の場合には $\mathrm{Tr}\, o(a_1) o(a_2) q^{L_0}$ を指標 $\mathrm{ch}\, V$ と Eisenstein 級数

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{1}{12} + 2q + 6q^2 + 8q^3 + 14q^4 + 12q^5 + \cdots \\ E_4 &= \frac{1}{720} + \frac{1}{3}q + 3q^2 + \frac{28}{3}q^3 + \frac{73}{3}q^4 + 42q^5 + \cdots \end{aligned} \tag{6.4}$$

を用いて表すことができる。ここに

$$E_{2k} = -\frac{B_{2k}}{(2k)!} + \frac{2}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^{2k-1} \right) q^n \tag{6.5}$$

であり, B_m は

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!} \tag{6.6}$$

で定義された Bernoulli 数である。具体的には, 次のような公式が得られる。

$$\mathrm{Tr}\, o(a) q^{L_0} = \frac{2(a|\omega)}{c} q \frac{d}{dq} \mathrm{ch}\, V \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, o(a_1) o(a_2) q^{L_0} = \Bigg(& \frac{44(a_1|a_2) + 20(a_1|\omega)(a_2|\omega)}{c(5c+22)} \left(q \frac{d}{dq} \right)^2 \\ & -(11 + 60E_2) \frac{c(a_1|a_2) - 2(a_1|\omega)(a_2|\omega)}{3c(5c+22)} q \frac{d}{dq} \\ & +(11 + 120E_2 - 720E_4) \frac{c(a_1|a_2) - 2(a_1|\omega)(a_2|\omega)}{360(5c+22)} \Bigg) \mathrm{ch}\, V \end{aligned} \tag{6.8}$$

これより, 例えば

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,|_{V^3}\, o(a_1)o(a_2)\\
&\quad= \frac{-2(20c^2+40c\dim V^2+(3c-198)\dim V^3)}{c(5c+22)}(a_1|a_2)\\
&\quad+\frac{16(5c+10\dim V^2+12\dim V^3)}{c(5c+22)}(a_1|\omega)(a_2|\omega),\\
&\mathrm{Tr}\,|_{V^4}\, o(a_1)o(a_2)\\
&\quad= \frac{-2(55c^2+98c\dim V^2+60c\dim V^3+(4c-352)\dim V^4)}{c(5c+22)}(a_1|a_2)\\
&\quad+\frac{4(55c+(5c+120)\dim V^2+60\dim V^3+84\dim V^4)}{c(5c+22)}(a_1|\omega)(a_2|\omega)
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

などが得られる。

この定理の証明には, Zhu が [Z] で示したいくつかの関係式を利用する。Eisenstein 級数の正規化等は [DM] にあわせた。

なお, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の場合, 中心電荷 1/2 の冪等元に対して上の公式を適用することによって, 2A 元に対する McKay-Thompson 級数 $T_{2\mathrm{A}}(q)$ がすべての次数で決定してしまうことを注意しておく。すなわち Eisenstein 級数と楕円モジュラー函数 $J(\tau)$ を用いて $T_{2\mathrm{A}}(q)$ を表示することができる。従って, Hauptmodul $T_{2\mathrm{A}}(q)$ のよく知られた表示

$$
T_{2\mathrm{A}}(q)=\left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24}+2^{12}\left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}+24 \tag{6.10}
$$

と比較すれば, 一種の函数等式が得られるが, さほど美しくはないように思われるので, 具体形は述べないことにする。

ところで, 本稿の結果は, Dong-Mason の結果 [DM] と比較すると興味深い。彼らは, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ のモンスター不変な特異ベクトルで次数 12 のものが存在することを利用して, ムーンシャイン加群のトーラス上の 1 点函数によってウェイト 12 の尖点形式 $\Delta(q)$ を実現し, レベル 1 のモジュラー形式[註15] がすべてムーンシャイン加群のトーラス上の 1 点函数として得られることを示した。これに対して, 本稿では, モンスター不変な特異ベクトルで次数 12 未満のものが存在しないことを用いて, 跡 $\mathrm{Tr}\, R_{a_1}\cdots R_{a_5}$ が決定できることを示したのである。

参考文献

[Co] Conway, J.H.: A simple construction for the Fischer-Griess monster group, Invent. Math. **79**, 513–540 (1985).

15. 正確に言うと上半平面上で正則な非負整数をウェイトに持つレベル 1 のモジュラー形式であって $a_0q^{-1}+a_2q+a_3q^2+\cdots$ なる形の展開を持つもの。

[CN] Conway, J.H. and Norton, S.P.: Monstrous moonshine, Bull. London Math. Soc. **11**, 308–339 (1979)

[DM] Dong, C.-Y. and Mason, G.: Monstrous moonshine of higher weight. Acta Math. **185**, 101–121 (2000).

[FLM] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. and Meurman, A.: *Vertex operator algebras and the Monster*. Pure and Appl. Math. 134, Academic Press, Boston, 1989.

[Gr1] Griess, R.L.: The friendly giant. Invent. Math. **69**, 1–102 (1982)

[Gr2] Griess, R.L.: The vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $O^+(10,2)$. In: *The Monster and Lie algebras (Columbus, Ohio, 1996)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. 7, pp. 43-58, de Gruyter, Berlin, 1998.

[HL] Harada, K. and Lang, M.-L.: Modular forms associated with the Monster module. In: *The Monster and Lie algebras (Columbus, Ohio, 1996)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. 7, pp. 59–83, de Gruyter, Berlin, 1998.

[Hö] Höhn, G.: Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster. Dissertation, Bonn, 1995.

[Li] Li, H.-S.: Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, J. Pure Appl. Algebra **96**, 279–297 (1994).

[Ma1] Matsuo, A.: Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Lager symmetry. Preprint math.QA/0007169.

[Ma2] 松尾　厚: 「W代数とモンスター」数理解析研究所研究集会「符号, 格子, 頂点作用素代数」講究録に収録予定

[MaN] Matsuo, A. and Nagatomo, K.: *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields*. MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, 1999.

[MeN] Meyer, W. and Neutsch, W.: Associative subalgebras of the Griess algebra, J. Algebra **158**, 1-17 (1993).

[Mi] Miyamoto, M.: Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, J. Algebra **179**, 528–548 (1996).

[No] Norton, S.P.: The Monster algebra: some new formulae. In: *Moonshine, the Monster, and related topics (South Hadley, MA, 1994)*, Contemp. Math. 193 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.297–306.

[Z] Zhu, Y.-C.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. Amer. Math. Soc. **9**, 237–302 (1996).